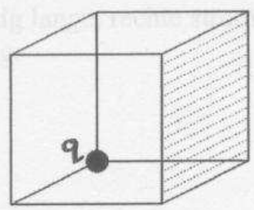
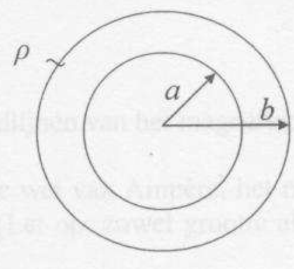
## Vraag 1

a- Een lading $q$ bevindt zich in de hoek van een kubus waarvan de ribben een lengte $a$ hebben, zie tekening. Wat is de flux van **E** door het gearceerde oppervlak?




**Hint**: Construeer een symmetrische situatie en maak gebruik van de wet van Gauss.




Vervolgens beschouwen we bovenstaande isolerende bolschil met binnenstraal $a$ en buitenstraal $b$. Op deze bolschil bevindt zich een lading. De ladingsdichtheid is een functie van $r$ (de afstand tot het centrum van de bolschil),

$$\rho = k/r,$$

met $k$ een constante.

b- Bereken nu het elektrische veld **E** in de volgende drie gebieden:

- i) $r < a$
- ii) $a < r < b$
- iii) $r > b$

c- Maak een schets van **E** als functie van r.

d- Bereken de potentiaal $V$ in het centrum van de bolschil ($r = 0$), neem hierbij aan dat de potentiaal nul is voor $r = \infty$.

**N.B.:** Heb je geen resultaat voor **E**, laat dan aan de hand van een zelf verzonnen **E**-veld zien hoe je de potentiaal berekent.

Gegeven zijn nu de velden:

$$\mathbf{E_1} = k[2yz\,\hat{\mathbf{x}} + xy\,\hat{\mathbf{y}} + 3z^2x\,\hat{\mathbf{z}}] \quad \text{en} \quad \mathbf{E_2} = k[yz^2\,\hat{\mathbf{x}} + xz^2\,\hat{\mathbf{y}} + 2xyz\,\hat{\mathbf{z}}],$$

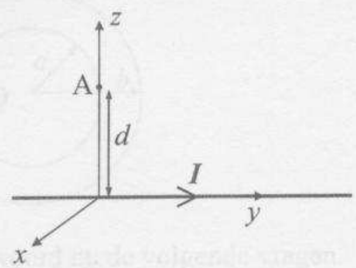
waar $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$ eenheidsvectoren zijn.

e- Welke van deze velden is een mogelijk elektrostatisch veld?

**Vraag 2**

a- Geef de wet van Ampère in zowel differentiële als in integrale vorm.

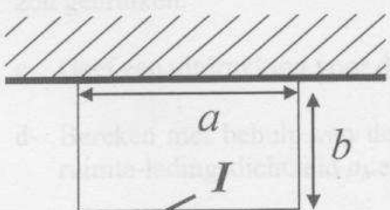
We beschouwen nu een oneindig lange, rechte stroomdraad waar een stroom $I$ doorheen loopt, zie onderstaande tekening.




b- Maak een schets van de veldlijnen van het magnetische veld rond deze draad.

c- Bereken, met behulp van de wet van Ampère, het magneetveld **B** in het punt A op afstand $d$ boven de draad. (Let op: zowel grootte als richting van het magneetveld worden gevraagd.)

Vervolgens bevestigen we een U-vormige stroomdraad met schanieren aan een plafond, door deze draad loopt een stroom $I$. De U-vormige stroomdraad kan door de scharnierbevestiging vrij naar voren en achteren draaien. We leggen nu een magneetveld over deze opstelling aan.




d- Hoe moet het magneetveld gericht zijn indien we de stroomdraad naar voren willen laten draaien?

e- Als we het magneetveld uit d- aanleggen, wat is dan de kracht **F** op de stroomdraad?

We beschouwen nu een oneindig lange, rechte stroomdraad met straal $R$. Voor deze draad geldt dat de volume-stroomdichtheid **J** en de oppervlakte-stroomdichtheid **K** gegeven zijn door

$$\mathbf{J} = 3ks\hat{\mathbf{z}} \quad \text{en} \quad \mathbf{K} = -3kR^2\,\hat{\mathbf{z}}.$$

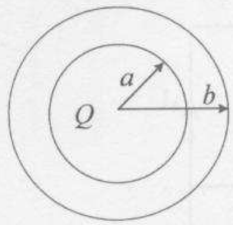
Hierin is $k$ een constante, $s$ de afstand tot de as van de draad en $\hat{\mathbf{z}}$ de eenheidsvector in de $z$-richting, langs de as van de draad.

f- Bereken de totale stroom door de draad.

g- Bereken het magneetveld zowel binnen als buiten de draad.

## Vraag 3

Een metalen bol met een straal $a$ draagt een lading $Q$. De bol is omsloten door een concentrische schil van een lineair diëlektrisch materiaal (permittiviteit is $\varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_0$) met een straal $b$ (zie onderstaande tekening).




Beantwoord nu de volgende vragen.

a- Geef de wet van Gauss in termen van de elektrische verplaatsing **D**.

b- Bereken met behulp hiervan de elektrische veldsterkte **E** als functie van de afstand tot het middelpunt $r$ voor de volgende gevallen:

i) $r < a$
ii) $a < r < b$
iii) $r > b$

**N.B.:** Heb je geen resultaat voor **E**, geef dan bij c- en d- alleen de vergelijkingen die je zou gebruiken.

c- Geef een uitdrukking voor de polarisatie **P** van het diëlektricum.

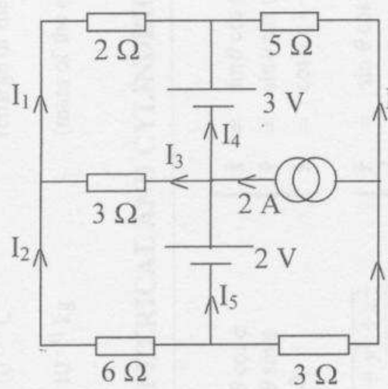
d- Bereken met behulp van de hierboven gevonden uitdrukking voor **P** de gebonden ruimte-ladingsdichtheid $\rho_b$ en oppervlakte-ladingsdichtheid $\sigma_b$ van het diëlektricum.

Beschouw nu de situatie waarbij de bol is gevormd uit een lineair diëlektrich materiaal en geen netto lading draagt en de concentrische schil metallisch is met daarop een lading Q.

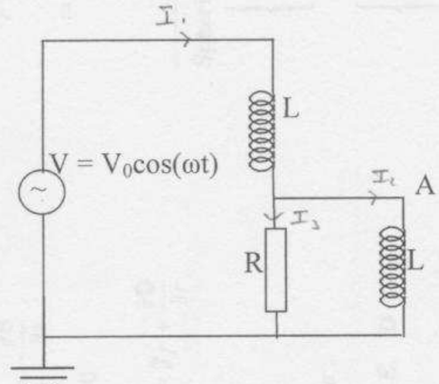
e- Beargumenteer in dit geval (bij voorkeur met kwalitatieve argumenten) wat de ladingsverdeling wordt en hoe **E**, **P**, V, $\sigma_b$ en $\rho_b$ zich gedragen.

## Opgave 4

a- Gegeven is onderstaande schakeling. Stel 7 vergelijkingen voor de stromen $I_1$ t/m $I_7$ op. Het stelsel hoeft niet te worden opgelost.




b- Gegeven is onderstaande schakeling. Bereken de spanning in het punt A in de complexe schrijfwijze. Geef ook de spanning in A in de reële schrijfwijze.



## BASIC EQUATIONS OF ELECTRODYNAMICS

**Maxwell's Equations**

*In general :*

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{cases}$$

*In matter :*

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{cases}$$

**Auxiliary Fields**

*Definitions :*

$$\begin{cases} \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \\ \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} - \mathbf{M} \end{cases}$$

*Linear media :*

$$\begin{cases} \mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}, \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\mathbf{B} \end{cases}$$

**Potentials**

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \qquad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

**Lorentz force law**

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

**Energy, Momentum, and Power**

*Energy :* $U = \frac{1}{2}\int \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right) d\tau$

*Momentum :* $\mathbf{P} = \epsilon_0 \int (\mathbf{E} \times \mathbf{B})\, d\tau$

*Poynting vector :* $\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{E} \times \mathbf{B})$

*Larmor formula :* $P = \frac{\mu_0}{6\pi c} q^2 a^2$

## FUNDAMENTAL CONSTANTS

| | | |
|---|---|---|
| $\epsilon_0$ | $= 8.85 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/Nm^2}$ | (permittivity of free space) |
| $\mu_0$ | $= 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{N/A^2}$ | (permeability of free space) |
| $c$ | $= 3.00 \times 10^{8}\ \mathrm{m/s}$ | (speed of light) |
| $e$ | $= 1.60 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$ | (charge of the electron) |
| $m$ | $= 9.11 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg}$ | (mass of the electron) |

## SPHERICAL AND CYLINDRICAL COORDINATES

**Spherical**

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{\mathbf{x}} = \sin\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{r}} + \cos\theta\cos\phi\,\hat{\boldsymbol{\theta}} - \sin\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \hat{\mathbf{y}} = \sin\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{r}} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \hat{\mathbf{z}} = \cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} - \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = \tan^{-1}(\sqrt{x^2+y^2}/z) \\ \phi = \tan^{-1}(y/x) \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{\mathbf{r}} = \sin\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{y}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{z}} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} = \cos\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{y}} - \sin\theta\,\hat{\mathbf{z}} \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} = -\sin\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\phi\,\hat{\mathbf{y}} \end{cases}$$

**Cylindrical**

$$\begin{cases} x = s\cos\phi \\ y = s\sin\phi \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{\mathbf{x}} = \cos\phi\,\hat{\mathbf{s}} - \sin\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \hat{\mathbf{y}} = \sin\phi\,\hat{\mathbf{s}} + \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} s = \sqrt{x^2+y^2} \\ \phi = \tan^{-1}(y/x) \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{\mathbf{s}} = \cos\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\phi\,\hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} = -\sin\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\phi\,\hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}} \end{cases}$$

## VECTOR DERIVATIVES

**Cartesian.** $d\mathbf{l} = dx\,\hat{\mathbf{x}} + dy\,\hat{\mathbf{y}} + dz\,\hat{\mathbf{z}};\quad d\tau = dx\,dy\,dz$

*Gradient :* $$\nabla t = \frac{\partial t}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial t}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial t}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

*Divergence :* $$\nabla\cdot\mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

*Curl :* $$\nabla\times\mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{z}}$$

*Laplacian :* $$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$$

**Spherical.** $d\mathbf{l} = dr\,\hat{\mathbf{r}} + r\,d\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\sin\theta\,d\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}};\quad d\tau = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$

*Gradient :* $$\nabla t = \frac{\partial t}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial t}{\partial\phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

*Divergence :* $$\nabla\cdot\mathbf{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, v_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}$$

*Curl :* $$\nabla\times\mathbf{v} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial\phi}\right]\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}(r v_\phi)\right]\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right]\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

*Laplacian :* $$\nabla^2 t = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial t}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial t}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 t}{\partial\phi^2}$$

**Cylindrical.** $d\mathbf{l} = ds\,\hat{\mathbf{s}} + s\,d\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} + dz\,\hat{\mathbf{z}};\quad d\tau = s\,ds\,d\phi\,dz$

*Gradient :* $$\nabla t = \frac{\partial t}{\partial s}\hat{\mathbf{s}} + \frac{1}{s}\frac{\partial t}{\partial\phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial t}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

*Divergence :* $$\nabla\cdot\mathbf{v} = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}(s v_s) + \frac{1}{s}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

*Curl :* $$\nabla\times\mathbf{v} = \left[\frac{1}{s}\frac{\partial v_z}{\partial\phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z}\right]\hat{\mathbf{s}} + \left[\frac{\partial v_s}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial s}\right]\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{s}\left[\frac{\partial}{\partial s}(s v_\phi) - \frac{\partial v_s}{\partial\phi}\right]\hat{\mathbf{z}}$$

*Laplacian :* $$\nabla^2 t = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(s\frac{\partial t}{\partial s}\right) + \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 t}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$$

## VECTOR IDENTITI

**Triple Products**

(1) $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A}) = \mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$

(2) $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$

**Product Rules**

(3) $\nabla(fg) = f(\nabla g) + g(\nabla f)$

(4) $\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B}) + \mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A}) + (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}$

(5) $\nabla\cdot(f\mathbf{A}) = f(\nabla\cdot\mathbf{A}) + \mathbf{A}\cdot(\nabla f)$

(6) $\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) - \mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B})$

(7) $\nabla\times(f\mathbf{A}) = f(\nabla\times\mathbf{A}) - \mathbf{A}\times(\nabla f)$

(8) $\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla\cdot\mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{A})$

**Second Derivatives**

(9) $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) = 0$

(10) $\nabla\times(\nabla f) = 0$

(11) $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$

## FUNDAMENTAL THEOREM

**Gradient Theorem :** $\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}(\nabla f)\cdot d\mathbf{l} = f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})$

**Divergence Theorem :** $\int(\nabla\cdot\mathbf{A})\,d\tau = \oint\mathbf{A}\cdot d\mathbf{a}$

**Curl Theorem :** $\int(\nabla\times\mathbf{A})\cdot d\mathbf{a} = \oint\mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}$